

Методы аддитивной комбинаторики

Шкредов И.Д.

2 марта 2011 г.

В настоящем тексте содержится мое выступление на ММО от 1 марта 2011 г. Более подробные сведения по аддитивной комбинаторике можно найти в книгах [1], [2], а также обзорах [3]–[5].

1 Введение

Комбинаторная теория чисел или, как ее сейчас называют, аддитивная комбинаторика — это раздел математики в котором изучают комбинаторные вопросы, связанные с групповой операцией. Первый результат в этой науке был получен А.Л. Коши [6] в 1813 г. Пусть $\mathbf{G} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p — простое. Тогда для любых двух множеств $A, B \subseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ выполнено

$$|A + B| \geq \min\{p, |A| + |B| - 1\}. \quad (1)$$

Здесь $A + B$ означает сумму по Минковскому, а именно

$$A + B := \{c \in \mathbf{G} : c = a + b, a \in A, b \in B\}.$$

Аналогично определяется сумма нескольких множеств.

Неравенство (1) было перенесено на группу целых чисел. В 1930 г. Л.Г. Шнирельман определил плотность множества $A \subseteq \mathbb{N}$, как

$$\sigma(A) = \inf_n \frac{|A \cap \{1, 2, \dots, n\}|}{n}.$$

Заметим, что плотность Шнирельмана равна нулю, если A не содержит единицы. Пусть теперь $A, B \subseteq \mathbb{N}$ — произвольные множества, содержащие нуль. Имеет место неравенство

$$\sigma(A + B) \geq \sigma(A) + \sigma(B) - \sigma(A)\sigma(B). \quad (2)$$

Неравенство (2) позволило Шнирельману доказать (см. [7]) свою знаменитую теорему о представимости любого натурального числа в виде суммы ограниченного количества простых. Полный аналог оценки (1) для плотности Шнирельмана, а именно, неравенство

$$\sigma(A + B) \geq \min\{1, \sigma(A) + \sigma(B)\}$$

было получено Манном [8] в 1942 г.

2 Арифметические прогрессии

В 1927 году Б.Л. Ван дер Варден доказал свою знаменитую теорему об арифметических прогрессиях (см. [11]).

Теорема 2.1 (Ван дер Варден) Пусть h и k натуральные числа. Существует такое число $N(h, k)$, что для любого натурального $N \geq N(h, k)$ и произвольного разбиения множества $[N]$ на h подмножеств, одно из подмножеств содержит арифметическую прогрессию длины k , то есть кортеж $n, n + d, n + 2d, \dots, n + (k - 1)d$, где n, d — натуральные числа.

Несмотря на кажущуюся простоту и естественность теорема Ван дер Вардена сыграла значительную роль в развитии двух разделов математики — аддитивной комбинаторики и комбинаторной эргодической теории. Обе указанных области математики связаны между собой теснейшим образом и находятся на стыке таких наук, как аддитивная и аналитическая теория чисел, теория графов и теория динамических систем. Сама по себе теорема Ван дер Вардена является одним из фундаментальных результатов теории Рамсея (см. [13, 14]). Действительно, если в теореме 2.1 разбиение множества целых чисел на h подмножеств $C_1, C_2, \dots, C_h$ трактовать как раскраску $\mathbb{Z}$ в h различных цветов, то теорема Ван дер Вардена утверждает, что в множестве целых чисел найдется *монохроматическая* арифметическая прогрессия, то есть прогрессия, все элементы которой, раскрашены в один и тот же цвет.

В этом пункте мы обсудим два глубоких обобщения теоремы Ван дер Вардена : теорему Радо о регулярных системах линейных уравнений и теорему Семереда об арифметических прогрессиях.

Классическим результатом, полностью отвечающим на вопрос имеет ли данное *линейное* уравнение монохроматическое решение при произвольной раскраске, является теорема Радо [34] (см. также [41]). Пусть $U = (u_{ij})$ — матрица $m \times n$, все элементы которой целые. Рассмотрим линейное уравнение

$$\sum_{j=1}^n u_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Определение 2.2 Система уравнений (3) называется регулярной в $\mathbb{Z}$, если для любой раскраски $\mathbb{Z}$ в конечное число цветов найдется монохроматическое решение системы (3).

Заметим, что числа $x_1, \dots, x_n$ не предполагаются различными.

Теорема 2.3 (Радо) Пусть $U = (u_{ij})$ — матрица $m \times n$, все элементы которой целые. Система уравнений (3) является регулярной в $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда найдутся столбцы $c_1, \dots, c_n$ и числа k_i , $1 \leq k_1 < \dots < k_t = n$ такие, что новые столбцы

$$A_i = \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} C_j$$

удовлетворяют условиям

(1) A_1 является нулевым столбцом.

(2) Для $i = 1, \dots, t$ столбец A_i есть линейная комбинация $C_1, \dots, C_{k_{i-1}}$ с рациональными коэффициентами.

Матрицы, для которых выполнены условия (1) и (2) теоремы 2.3 будем называть *регулярными*. В случае $m = 1$ теорема Радо записывается наиболее просто.

Теорема 2.4 (Раддо) Пусть n — натуральное число и $c_1, \dots, c_n$ — ненулевые целые числа. Система уравнений

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n = 0 \quad (4)$$

является регулярной в $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда найдется непустое множество $I \subseteq [n]$ такое, что сумма $\sum_{i \in I} c_i$ равна нулю.

Например, уравнения $x - 2y + z = 0$ и $x + y - z = 0$ являются регулярными, а уравнение $x + y - 5z = 0$ — нет. Если $x - 2y + z = 0$, то числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию.

Чтобы сформулировать теорему Семереди нам понадобится следующая величина.

Пусть N натуральное число. Положим

$$a_k(N) = \frac{1}{N} \max\{|A| : A \subseteq [N],$$

A — не содержит арифметических прогрессий длины $k\}$.

В [16] П. Эрдеши и П. Туран высказали гипотезу, согласно которой в любом множестве положительной плотности найдется арифметическая прогрессия заданной длины. Другими словами, они предположили, что для любого $k \geq 3$

$$a_k(N) \rightarrow 0, \text{ при } N \rightarrow \infty \quad (5)$$

Ясно, что из этого предположения вытекает теорема Ван дер Вардена.

Простейший случай $k = 3$ гипотезы (5) был доказан К.Ф. Ротом в [24]. В своей работе Рот, используя метод Харди–Литтлвуда получил следующий результат.

Теорема 2.5 (Рот) Для всех натуральных $N \geq 3$ выполнено

$$a_3(N) \ll \frac{1}{\log \log N}.$$

Результат Рота был затем улучшен Е. Семереди в [20] и Д.Р. Хиф–Брауном в [17], Бургенном [10] (см. также его более раннюю работу [26] и работу [27] по теореме Рота в $\mathbb{R}^n$). Наилучший, на сегодняшний день, результат об оценке сверху принадлежит Т. Сандерсу.

Теорема 2.6 (Сандерс) Пусть N — натуральное число, $N \geq 3$. Тогда

$$a_3(N) \ll \frac{(\log \log N)^5}{\log N}. \quad (6)$$

Для произвольного k гипотеза (5) была доказана Е. Семереди [19, 18] в 1975 году. В своем доказательстве Семереди использует трудные комбинаторные аргументы. Основу его доказательства составляет, так называемая, лемма регулярности, которая является, на сегодняшний день, важнейшим инструментом исследования графов (см., например, [21, 22]). Альтернативное доказательство было предложено Х. Фюрстенбергом в [44]. Его подход использует методы эргодической теории. Фюрстенберг показал, что теорема Е. Семереди эквивалентна утверждению о кратной возвращаемости для почти всех точек в произвольной динамической системе.

Пусть X — некоторое множество с сигма-алгеброй множеств $\mathcal{B}$. Пусть также T — измеримое, сохраняющее меру μ отображение X в себя. Всюду ниже будем считать, что

$\mu(X) = 1$. Четверка $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ называется *динамической системой с инвариантной мерой*. Хорошо известная **теорема А. Пуанкаре о возвращении** [133] утверждает, что для всякого измеримого множества $E \subseteq X$, $\mu E > 0$ существует натуральное $n > 0$ такое, что $\mu(E \cap T^{-n}E) > 0$.

В работе [43] (см. также [44, 46]) Х. Фюрстенберг обобщил теорему Пуанкаре на случай нескольких степеней отображения T .

Теорема 2.7 (Фюрстенберг) Пусть X — пространство с сигма-алгеброй измеримых множеств $\mathcal{B}$ и μ — мера на X . Пусть T — отображение X в себя, сохраняющее меру μ и $k \geq 3$. Тогда для любого измеримого множества E с $\mu E > 0$ существует натуральное $n > 0$ такое, что

$$\mu(E \cap T^{-n}E \cap T^{-2n}E \cap \dots \cap T^{-(k-1)n}E) > 0.$$

Следует отметить, что используя свой метод, Фюрстенберг и его ученики получили множество глубоких обобщений теоремы Семереди (см., например, [43]— [46]) которые комбинаторными методами доказать пока не удалось. Подробнее о теореме Семереди можно узнать в обзоре [4].

А. Беренд в работе [62] получил нижнюю оценку величины $a_3(N)$ (см. также статью [64]).

Теорема 2.8 (Беренд) Пусть $\varepsilon > 0$ — любое действительное число. Тогда существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что для любого натурального N , $N \geq N_\varepsilon$, выполнено

$$a_3(N) \geq \exp(-(1 + \varepsilon)C\sqrt{\log N}),$$

где $C > 0$ — некоторая абсолютная константа.

Несмотря на свою простоту (доказательство занимает всего две страницы), результат А. Беренда, полученный им в 1946 году, на сегодняшний день остается наилучшим. Как недавно показали Т. Чоен и автор для произвольных линейных уравнений с количеством неизвестных не меньше шести нижняя оценка Беренда — точна, в том смысле, что справедлива такая же по-порядку верхняя оценка.

Р. Ранкин в [65] обобщил теорему Беренда на случай всех $k \geq 3$.

Теорема 2.9 (Ранкин) Пусть $\varepsilon > 0$ — любое действительное число и $k \geq 3$ — натуральное. Тогда для всех достаточно больших N , выполнено

$$a_k(N) \geq \exp(-(1 + \varepsilon)C_k(\log N)^{1/(k-1)}),$$

где C_k некоторая положительная эффективная константа, зависящая только от k .

К сожалению, методы Семереди дают очень слабые верхние оценки для $a_k(N)$. Эргодический подход вообще не дает никаких оценок. Только в 2001 году В.Т. Гауэрс [56] получил количественный результат о скорости стремления к нулю величины $a_k(N)$ для $k \geq 4$. Он доказал следующую теорему.

Теорема 2.10 (Гауэрс) Пусть $k \geq 4$. Тогда

$$a_k(N) \ll 1/(\log \log N)^{c_k},$$

где константа $c_k > 0$ зависит только от k .

Результат Гауэрса является значительным шагом на пути к доказательству другой знаменитой гипотезы Эрдеша и Турана об арифметических прогрессиях.

(Гипотеза Эрдеша–Турана). Пусть $A = \{n_1 < n_2 < \dots\}$ — бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i} = \infty.$$

Тогда A содержит арифметическую прогрессию любой длины.

Легко показать, что гипотеза 2.10 эквивалентна тому, что для всех натуральных $k \geq 3$ ряд $\sum_{l=1}^{\infty} a_k(4^l)$ сходится (доказательство этого факта может быть найдено, например, в [4]). Следовательно, из оценки величины $a_k(N)$ для всех $k \geq 3$ вида $a_k(N) \ll 1/(\log N)^{1+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ будет вытекать гипотеза 2.10.

В следующих двух пунктах мы доказываем теорему Рота в случае группы $\mathbf{G} = \mathbb{F}_3^n$. Пункт 3 содержит необходимые определения из анализа Фурье, а пункт 4 посвящен доказательству теоремы 2.5.

3 Дискретный анализ Фурье

В этом пункте мы напомним некоторые понятия анализа Фурье. Пусть $\mathbf{G} = (\mathbf{G}, +)$ — локально-компактная абелева группа с аддитивной групповой операцией $+$. Хорошо известно, что на всякой такой группе существует мера Хаара $\mu_{\mathbf{G}}$, то есть неотрицательная регулярная мера (все определения могут быть найдены, например, в [9] см. главы 1, 2 и добавление E) такая, что для всякого борелевского множества B и произвольного элемента $x \in \mathbf{G}$ имеем

$$\mu_{\mathbf{G}}(B + x) = \mu_{\mathbf{G}}(B).$$

На пространстве $L_2(\mathbf{G}, \mu_{\mathbf{G}}) = L_2(\mathbf{G})$ задано скалярное произведение двух комплексных функций f и g

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{G}} f(x) \overline{g(x)} d\mu_{\mathbf{G}}(x).$$

Пусть далее $\widehat{\mathbf{G}}$ — двойственная группа для группы $\mathbf{G}$, то есть локально-компактная абелева группа непрерывных гомоморфизмов ξ из $\mathbf{G}$ в $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\xi : x \rightarrow \xi \cdot x = \xi(x)$, $x \in \mathbf{G}$. Преобразование Фурье $(\Phi f)(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ произвольной комплексной функции $f \in L_1(\mathbf{G})$ задается формулой

$$(\Phi f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{G}} f(x) \overline{\xi(x)} d\mu_{\mathbf{G}}(x). \quad (7)$$

Ясно, что всегда справедливо неравенство

$$\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \int_{\mathbf{G}} |f(x)| d\mu_{\mathbf{G}}(x) = \|f\|_1.$$

Пусть $\Gamma \subseteq \widehat{\mathbf{G}}$ — некоторое множество характеров и $\varepsilon \in [0, 1]$ — действительное число. Определим множество Бора, порожденное множеством Γ

$$\mathcal{B}(\Gamma, \varepsilon) = \{x \in \mathbf{G} : \|\xi \cdot x\| \leq \varepsilon/2\pi, \text{ для всех } \xi \in \Gamma\}, \quad (8)$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова метрика на окружности. Можно сказать, что величина $\|\xi \cdot x\|$ измеряет насколько ξ отличается от тривиального характера $\xi_0 \equiv 1$. Простые рассуждения, связанные с принципом Дирихле позволяют доказать лемму (см., например, [124]).

Лемма 1. Пусть $\mathbf{G}$ — компактная абелева группа и $|\Gamma| = d$. Тогда справедливо неравенство $\mu_{\mathbf{G}}(\mathcal{B}(\Gamma, \varepsilon)) \geq \varepsilon^d$.

В частности, множества Бора всегда непустые.

В дальнейшем нам понадобится понятие свертки двух функций $f, g \in L_1(\mathbf{G})$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{G}} f(y)g(x - y) d\mu_{\mathbf{G}}(y).$$

Имеем (см., например, [9])

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

Операция свертки очень важна для аддитивных задач комбинаторной теории чисел, поскольку носитель сверток характеристических функций двух множеств совпадает с суммой этих множеств.

Часто мы будем рассматривать ситуацию когда абелева группа $\mathbf{G}$ — конечна. Хорошо известно, что в этом случае $\widehat{\widehat{\mathbf{G}}} = \mathbf{G}$. Обозначим через N мощность группы $\mathbf{G}$. Очень удобно определить преобразование Фурье функции f по формуле

$$(\Phi f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{G}} f(x)\xi(x). \quad (9)$$

Таким образом, в отличие от (7) мы не нормируем суммы по $\mathbf{G}$. Нам понадобятся несколько известных формул, касающихся преобразования Фурье

$$\|f\|_2^2 := \sum_{x \in \mathbf{G}} |f(x)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in \widehat{\mathbf{G}}} |\widehat{f}(\xi)|^2 = \frac{1}{N} \|\widehat{f}\|_2^2 \quad (\text{равенство Парсеваля}). \quad (10)$$

$$\langle f, g \rangle := \sum_{x \in \mathbf{G}} f(x)\overline{g(x)} = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in \widehat{\mathbf{G}}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)} = \frac{1}{N} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle \quad (\text{тождество Планшереля}). \quad (11)$$

$$\sum_{x \in \mathbf{G}} |(f * g)(x)|^2 = \sum_{x \in \mathbf{G}} \left| \sum_{y \in \mathbf{G}} f(y)g(x - y) \right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in \widehat{\mathbf{G}}} |\widehat{f}(\xi)|^2 |\widehat{g}(\xi)|^2. \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in \widehat{\mathbf{G}}} \widehat{f}(\xi)\xi(x) \quad (\text{формула обращения}). \quad (13)$$

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g} \quad \text{и} \quad \widehat{(fg)}(x) = \frac{1}{N} (\widehat{f} * \widehat{g})(x). \quad (14)$$

Будем писать для краткости $\sum_s$ вместо суммы $\sum_{s \in \mathbf{G}}$ и $\sum_{\xi}$ вместо $\sum_{\xi \in \widehat{\mathbf{G}}}$.

Пример 3.1 Пусть p — простое число, n — натуральное число и $\mathbf{G} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$. Группа $\mathbf{G}$ является векторным пространством со скалярным произведением

$$x \cdot y = \vec{x} \cdot \vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \pmod{p}.$$

Преобразование Фурье функции $f : \mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$ вычисляется по формуле

$$\widehat{f}(r) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_p^n} f(x) e(-\langle r, x \rangle),$$

где $e(x) = e_p(x) = e^{2\pi i x/p}$.

В группах $\mathbb{Z}_p^n$ понятию множества Бора соответствует понятие *аффинного подпространства*. Пусть $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ — некоторые линейно независимые векторы и пусть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ — произвольные элементы $\mathbb{Z}_p$. Аффинным подпространством коразмерности k называется множество

$$P = P_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \{\vec{x} \in \mathbb{Z}_p^n : \langle \vec{x}, \vec{v}_1 \rangle = \varepsilon_1, \dots, \langle \vec{x}, \vec{v}_k \rangle = \varepsilon_k\}.$$

Если все ε_i равны нулю, то иногда мы будем писать $P(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ вместо $P_{0, \dots, 0}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$. Для множества $W = (w_1, \dots, w_{|W|})$ пусть $P(W)$ означает $P(w_1, \dots, w_{|W|})$. Преобразование Фурье характеристической функции χ_P множества $P = P(W)$ вычисляются чрезвычайно просто. Пусть L — линейное пространство размерности k , натянутое на вектора $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ и пусть $\vec{r} \in \mathbb{Z}_p^n$ — произвольный вектор. Ясно, что $P^\perp = L$ и для всякого $r \in L$ выполнено $\widehat{\chi}_P(r) = |P|$. Далее из равенства Парсеваля

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}_p^n} |\widehat{\chi}_P(r)|^2 = |P|N$$

вытекает, что $\widehat{\chi}_P(r) = 0$ для любого $r \notin L$. Иными словами

$$\widehat{\chi}_P(r) = \chi_L(r)|P|, \quad (15)$$

где χ_L — характеристическая функция множества L . Таким образом $|\widehat{\chi}_P(r)|$ либо нуль, либо равен $|P|$.

4 Плотностная стратегия

Приступим к доказательству теоремы 2.5 в группе $\mathbb{Z}_3^n$. Арифметической прогрессией длины три в такой группе называется тройка x, y, z , удовлетворяющая уравнению $x + y = 2z$ или, что тоже самое, $x + y + z = 0$.

Теорема 4.1 (Рот, группа $\mathbb{Z}_3^n$) Пусть $\mathbf{G} = \mathbb{Z}_3^n$ и A — произвольное множество без арифметических прогрессий длины три. Тогда

$$|A| \ll \frac{N}{\log N}. \quad (16)$$

Доказательство. Нам понадобится довольно общее определение (см. [55, 56]).

Определение 4.2 Пусть $\mathbf{G}$ — конечная абелева группа, $|\mathbf{G}| = N$, а $\alpha \in (0, 1)$ — действительное число. Функция $f : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}$ называется α -равномерной, если

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \alpha N.$$

Множество $A \subseteq \mathbf{G}$, $|A| = \delta N$ называется α -равномерным, если функция $f(x) := A(x) - \delta$ (балансовая функция) является α -равномерной.

Обсудим основные идеи, лежащие в доказательстве теоремы 4.1. Предположим, что множество $A \subseteq \mathbb{Z}_3^n$, $|A| = \delta N$ не содержит арифметических прогрессий длины три. Доказательство теоремы 4.1 представляет собой алгоритм. На первом шаге этого алгоритма

возможны две ситуации : либо множество A является α -равномерным с некоторым α , зависящем только от δ (в доказательстве α есть некоторая степень δ), либо не является.

Если A есть α -равномерное множество, то существование арифметических прогрессий в A проверяется довольно просто (см. лемму 2 ниже). Пусть теперь множество A не является α -равномерным. Можно показать, что α -равномерность множества A эквивалентна равномерной распределенности A в аффинных подпространствах коразмерности один. Говоря точнее, мощность пересечения α -равномерного множества A мощности δN с любым таким подпространством H примерно равна $\delta|H|$. Следовательно, если множество A не является α -равномерным, то найдется подпространство H такое, что $|A \cap H| = (\delta + \theta)|H|$, где $|\theta| > 0$. Более аккуратные рассуждения позволяют доказать, что подпространство можно выбрать так, чтобы величина θ была положительна и выражалась явным образом в терминах плотности δ (см. лемму 3).

После этого мы рассматриваем новое множество $A' = A \cap H$ и применяем к нему наш алгоритм. Заметим, что так как $A' \subseteq A$, то множество A' не содержит арифметических прогрессий длины три. Кроме того, плотность A' в H не меньше, чем $\delta + \theta$, где $\theta > 0$. Следовательно, на каждом шаге алгоритма плотность получающихся множеств увеличивается на положительную величину. С другой стороны, плотность всегда не превосходит единицы. Это означает, что через конечное число шагов наш алгоритм остановится. Следовательно, на каком-то шаге алгоритма мы получим подпространство $\tilde{H}$ некоторой размерности и α -равномерное множество $\tilde{A}$, принадлежащее $A \cap \tilde{H}$. Как было сказано выше, в этом случае множество $\tilde{A}$ содержит арифметическую прогрессию длины три. Значит, множество A также содержит арифметическую прогрессию. Опять получаем противоречие с предположением об отсутствии в A арифметических прогрессий.

Мы привели схему доказательства теоремы 4.1. Приступим теперь к самому доказательству. Арифметическая прогрессия $\{x, x + d, x + 2d\}$ называется *нетривиальной*, если $d \neq 0$ и *тривиальной* иначе.

Лемма 2. (α -равномерный случай, произвольная группа без элементов порядка 2) Пусть $\mathbf{G}$ — конечная абелева группа в которой отсутствуют элементы порядка два, $|\mathbf{G}| = N$ и $A, B, C \subseteq \mathbf{G}$ — любые множества, $|A| = \delta N$, $|B| = \beta N$, $|C| = \gamma N$. Если множество A является $\delta(\beta\gamma)^{1/2}/2$ — равномерным и $N > 2\beta^{-1}\gamma^{-1}$, то найдется решение уравнения $x + y = 2z$, $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$ такое, что x, y, z — различные.

Действительно, число решений уравнения $x + y = 2z$, $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$ равно $\sigma := \sum_x (A * B)(2x)C(x)$ или, в терминах преобразования Фурье

$$\sigma = \frac{1}{N} \sum_r \hat{A}(r)\hat{B}(r)\hat{C}(-2r) = \delta\beta\gamma N^2 + \frac{1}{N} \sum_{r \neq 0} \hat{A}(r)\hat{B}(r)\hat{C}(-2r).$$

Пусть $\alpha = \delta(\beta\gamma)^{1/2}/2$. Пользуясь α — равномерностью множества A , неравенством Коши–Буняковского и равенством Парсеваля, находим

$$\sigma \geq \delta\beta\gamma N^2 - \alpha N(|B||C|)^{1/2} \geq \delta\beta\gamma N^2/2 > |A|$$

и все доказано, поскольку число решений уравнения $x + y = 2z$ с $x = y = z$ не превосходит $|A|$.

Смысл леммы выше чрезвычайно простой. Пусть, для простоты, $A = B = C$, $|A| = \delta N$. Тогда по лемме 2 любое $\delta^2/2$ — равномерное множество A содержит нетривиальную

арифметическую прогрессию. Теперь мы рассмотрим противоположную, в некотором смысле, ситуацию.

Лемма 3. (не α —равномерный случай, группа $\mathbb{Z}_3^n$) Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}_3^n$ — произвольное множество, $|A| = \delta N$ и $\alpha \in (0, 1]$ — действительное число. Если A является не α —равномерным, то существует подпространство H коразмерности один и вектор x такие, что $|A \cap (H + x)| \geq (\delta + 2^{-1}\alpha)|H|$.

Действительно, так как множество A не является α —равномерным, то существует $r \neq 0$ такое, что $|\widehat{f}(r)| \geq \alpha N$, где $f(x) = A(x) - \delta$. Пусть $H_0 = \{x \in \mathbb{Z}_3^n : \langle x, r \rangle = 0\}$, $H_1 = \{x \in \mathbb{Z}_3^n : \langle x, r \rangle = 1\}$, $H_2 = \{x \in \mathbb{Z}_3^n : \langle x, r \rangle = -1\}$ и $a_j = \langle f, H_j \rangle$, $j \in [3]$. Тогда $\sum_j a_j = 0$ и $\sum_j |a_j| \geq |\widehat{f}(r)| \geq \alpha N$. Складывая эти два неравенства, находим j_0 такое, что $|a_{j_0}| + a_{j_0} \geq \alpha N/3$. Отсюда $a_{j_0} > 0$ и, более того, $a_{j_0} \geq \alpha N/6$. Полагая $H = H_0$ и $x \in H_{j_0}$ — любое, получаем $a_{j_0} = |A \cap (H + x)| - \delta|H| \geq \alpha N/6$ и лемма доказана.

Убедимся в справедливости теоремы 4.1. Объединим, для удобства, леммы 2, 3 в одно предложение.

Предложение 1. Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}_3^n$, $|A| = \delta N$ — произвольное множество без арифметических прогрессий длины три. Пусть также

$$N > 2\delta^{-2}. \quad (17)$$

Тогда существует подпространство H коразмерности один и вектор x такие, что $|A \cap (H + x)| \geq (\delta + 2^{-1}\delta^2)|H|$.

Покажем как из предложения 1 вытекает теорема 4.1. Предположим, что множество $A \subseteq \mathbb{Z}_3^n$ не содержит арифметических прогрессий длины три. Как было сказано выше, доказательство теоремы 4.1 представляет собой алгоритм. Проведем первый шаг нашего алгоритма. Пусть $H_0 = \mathbb{Z}_3^n$, $A_0 = A$, $\delta_0 = \delta$. Имеем $N > 2\delta^{-2}$. Применяя предложение 1, получаем подпространство H_1 коразмерности один и вектор x_1 для которых выполнено $|A_0 \cap (H_1 + x_1)| \geq (\delta_0 + 2^{-1}\delta_0^2)|H_1|$. После этого положим $A_1 = (A_0 - x_1) \cap H_1$.

Пусть на i -ом шаге алгоритма, $i \geq 1$, мы построили подпространство H_i коразмерности i , множество $A_i \subseteq H_i$, A_i не содержит арифметические прогрессии длины три, $\delta_i := |A_i|/|H_i|$ и вектор x_i такие, что

$$|A_{i-1} \cap (H_i + x_i)| \geq (\delta_{i-1} + 2^{-1}\delta_{i-1}^2)|H_i|. \quad (18)$$

Заметим, что на каждом шаге алгоритма плотность множеств A_i в подпространствах H_i увеличивается на величину $2^{-1}\delta_{i-1}^2 \geq 2^{-1}\delta^2$, поскольку на первом шаге алгоритма плотность A_0 в H_0 равна δ . Если

$$h_i := |H_i| > 2\delta^{-2} \geq 2\delta_i^{-2}, \quad (19)$$

то мы можем провести $(i + 1)$ -й шаг алгоритма. Легко видеть, что максимальное число шагов K нашего алгоритма не превосходит $2 \cdot 2\delta^{-1} = 4\delta^{-1}$, поскольку плотность множеств A_i ограничена сверху единицей. Действительно, на переход от плотности δ до плотности 2δ необходимо затратить не более $2\delta^{-1}$ шагов, поэтому всего нам требуется не более $2\delta^{-1} + 2(2\delta)^{-1} + 2(4\delta)^{-1} + \dots = 4\delta^{-1}$ шагов (более строго эти несложные вычисления изложены, например, в [56] или [4]). Это еще не есть доказательство теоремы 4.1 поскольку мы не проверяли выполнение условия (19) на каждом шаге нашего алгоритма. Имеем $\delta \gg 1/\log N$. Отсюда

$$h_K = 3^{-K}N \geq 3^{-4/\delta}N > 2\delta^{-2}.$$

Так как $h_i \geq h_K$ для всех $i \leq K$, то неравенство (19) выполняется на каждом шаге алгоритма. Теорема доказана. $\square$

Для того чтобы получить оригинальную теорему Рота 2.5 нужно провести рассуждения, аналогичные, вышеизложенным, заменив сдвиги подпространств сдвигами множеств Бора (8) (см., например, [26, 10]).

5 Нижние оценки величины $a_k(N)$ и изоморфизм Фреймана.

В пункте 4 мы доказали теорему Рота о верхней оценке величины $a_3(N)$. Сейчас мы напомним несколько результатов о *нижних* границах для $a_k(N)$, $k \geq 3$ — натуральное.

В 1946 году А. Беренд в статье [62], развивая метод из работ Р. Салема и Д. Спенсера [63, 64], получил следующую нижнюю оценку величины $a_3(N)$ (см. также [68]).

Теорема 5.1 (Беренд) Пусть $\varepsilon > 0$ — любое действительное число. Тогда существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для любого натурального N , $N \geq N_\varepsilon$, выполнено

$$a_3(N) \geq \exp(-(1 + \varepsilon)C\sqrt{\log N}),$$

где C некоторая положительная эффективная константа.

Доказательство. Пусть N_ε — натуральное число, такое что для всех $N \geq N_\varepsilon$, $N \in \mathbb{N}$ выполнено $\ln(4 \ln N)/\sqrt{\ln N} < \varepsilon$. Пусть также m и n — натуральные параметры и пусть $\Lambda = \{0, 1, \dots, m-1\}^n$. Рассмотрим n -мерную сферу $S_t = \{\vec{x} \in \Lambda : x_1^2 + \dots + x_n^2 = t\}$, где $0 \leq t \leq n(m-1)^2$. Ясно, что любая сфера S_t не содержит арифметических прогрессий длины три, в том смысле, что равенство $\vec{x} + \vec{y} = 2\vec{z}$ для $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in S_t$ возможно только если $\vec{x} = \vec{y} = \vec{z}$.

Заметим, что число всех сфер не превосходит nm^2 . Так как любая точка множества Λ принадлежит некоторой сфере, то по принципу Дирихле, существует такое $t_0 \in \mathbb{N}$, что мощность S_{t_0} не меньше, чем $m^n/(nm^2) = m^{n-2}/n$.

Итак, мы нашли достаточно плотное множество S_{t_0} из Λ , не содержащее арифметических прогрессий длины три. Построим по S_{t_0} множество $A \subseteq \mathbb{N}$ также не содержащее арифметических прогрессий. Для этого рассмотрим отображение $\varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$, задаваемое формулой $\varphi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i(2m)^{i-1}$. Пусть $A = \varphi(S_{t_0})$. Так как равенство $\varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}) = 2\varphi(\vec{z})$ выполнено тогда и только тогда, когда $\vec{x} + \vec{y} = 2\vec{z}$, то множество A не содержит арифметических прогрессий длины три. Заметим, что при этом, множество A лежит в отрезке натурального ряда $\{1, 2, \dots, (2m)^n\}$.

Выберем параметры m и n . Пусть $n = \lceil \sqrt{2 \log_2 N} \rceil$, а m удовлетворяет условиям $(2(m-1))^n \leq N < (2m)^n$. Имеем

$$|A| = |S_{t_0}| \geq \frac{m^{n-2}}{n} \geq N \frac{N^{-2/n}}{2^n n} \geq N e^{-(2\sqrt{2 \ln 2} + \frac{\ln(4 \ln N)}{\sqrt{\ln N}})\sqrt{\ln N}} \geq N e^{-(2\sqrt{2 \ln 2} + \varepsilon)\sqrt{\ln N}}. \quad (20)$$

Так как $a_3(N) \geq |A|/N$, то мы получили утверждение теоремы. $\square$

Несмотря на свою простоту, результат А. Беренда, полученный им в 1946 году, на сегодняшний день остается наилучшим.

Р. Ранкин в [65] обобщил теорему Беренда на случай всех $k \geq 3$.

Теорема 5.2 (Ранкин) Пусть $\varepsilon > 0$ — любое действительное число и $k \geq 3$ — натуральное. Тогда для всех достаточно больших N , выполнено

$$a_k(N) \geq \exp(-(1 + \varepsilon)C_k(\log N)^{1/(k-1)}),$$

где C_k некоторая положительная эффективная константа, зависящая только от k .

В своей работе Ранкин, развивая основную идею теоремы 5.1, строит целую последовательность сфер S_t . При этом он использует асимптотическую формулу из статьи [66] для числа решений уравнения $x_1^2 + \dots + x_n^2 = t$, $0 \leq x_i \leq t - 1$, $i = 1, \dots, n$.

Отображение φ из доказательства теоремы 5.1 является примером изоморфизма Фреймана порядка два.

Определение 5.3 Пусть $k \geq 2$ — натуральное число, G, H — некоторые группы, $A \subseteq G$, $B \subseteq H$ — произвольные подмножества. Отображение $\varphi : A \rightarrow B$ называется *гомоморфизмом Фреймана порядка k* , если для любых $a_1, \dots, a_k, a'_1, \dots, a'_k \in A$ равенство

$$a_1 + \dots + a_k = a'_1 + \dots + a'_k \quad (21)$$

влечет

$$\varphi(a_1) + \dots + \varphi(a_k) = \varphi(a'_1) + \dots + \varphi(a'_k). \quad (22)$$

Если, к тому же, φ — биекция и (22) влечет (21), то φ называется *гомоморфизмом Фреймана порядка k* .

Ясно, что обычный гомоморфизм двух групп является гомоморфизмом Фреймана произвольного порядка. Гомоморфизм Фреймана φ порядка k , $\varphi : A \rightarrow B$ задает корректно определенное отображение на множествах из kA в kB по формуле $\varphi(a_1 + \dots + a_k) := \varphi(a_1) + \dots + \varphi(a_k)$. Отсюда следует, например, что если между множествами A и B существует изоморфизм Фреймана порядка два (пишем $A \cong_2 B$), то $|A + A| = |B + B|$. Таким образом, изоморфизмы Фреймана служат естественным языком аддитивной комбинаторики : если мы хотим изучать k -е суммы множеств, то нужно рассматривать множества с точностью до изоморфизма порядка k .

Пример 5.4 а. Имеем $A = \{1, 10, 100\} \cong_3 \{1, 100, 1000\} = B$, поскольку у этих множеств отсутствуют нетривиальные аддитивные соотношения (если $a_1 + a_2 + a_3 = a'_1 + a'_2 + a'_3$, a_i, a'_i — любые из A или B , то a'_i есть перестановка a_i).

б. Если P — арифметическая прогрессия, то ее 2-изоморфный образ тоже является прогрессией.

с. Неверно, что $\{0, 1\}^n \cong_k \mathbb{F}_2^n$, k —любое, поскольку в $\mathbb{F}_2^n$ есть аддитивные соотношения, которые отсутствуют в $\{0, 1\}^n$.

6 Анализ Фурье высших порядков

В пунктах 2.5, 4 мы доказали теорему Рота и упомянули теорему Гауэрса о множествах без арифметических прогрессий. Сформулируем эти результаты еще раз.

Теорема 6.1 (Рот, Гауэрс) Для всех натуральных $N \geq 3$ и $k \geq 3$ выполнено

$$a_k(N) \ll \frac{1}{\log \log N}.$$

Как помнит читатель, доказательство теоремы Рота (случай $k = 3$) представляло собой некоторую итерационную процедуру, причем на каждом шаге этой процедуры рассматривалось два варианта : первый, когда множество A было α -равномерным с достаточно малым α и второй, когда равномерности не было. Переформулируем основной результат, применявшейся в первом случае (см. доказательство леммы 2).

Предложение 6.2 (равномерный случай) Пусть $\mathbf{G}$ — конечная абелева группа в которой отсутствуют элементы порядка два, $|\mathbf{G}| = N$ и $A \subseteq \mathbf{G}$, $|A| = \delta N$ — любое α — равномерное множество. Тогда число арифметических прогрессий в множестве A равно

$$\delta^3 N^2 + \theta \alpha \delta N^2, \quad (23)$$

где $|\theta| \leq 1$.

Пусть $f(x) = A(x) - \delta$ — балансовая функция множества A . Пусть также $\Lambda_3(f) = \sum_{x,d \in \mathbf{G}} f(x)f(x+d)f(x+2d)$, где f — произвольная функция. Например, $\Lambda_3(A)$ — это число арифметических прогрессий длины три в множестве A . Легко видеть, что $\Lambda_3(A) = \delta^3 N^3 + \Lambda_3(f)$ и, следовательно, предложение 6.2 можно проинтерпретировать так :

$$\text{Норма } \|\widehat{f}\|_\infty \text{ — мала} \implies \Lambda_3(f) \text{ — мало.} \quad (24)$$

Пусть теперь A — множество без арифметических прогрессий длины k , $k > 3$. Доказательство Гауэрса представляет собой глубокое обобщение метода Рота. Вместо величины Λ_3 он рассматривает ее аналог $\Lambda_k(f) = \sum_{x,d \in \mathbf{G}} f(x)f(x+d) \dots f(x+(k-1)d)$. Возникает вопрос : остается ли верной импликация (24) если вместо Λ_3 взять величину Λ_k ? Как показал Гауэрс в работе [56] ответ здесь отрицательный (эргодический аспект этой проблемы был рассмотрен ранее в [45]). Контрпример очень простой. Пусть $\mathbf{G} = \mathbb{Z}_N$, $x \in \mathbb{Z}_N$ и $|x|$ означает расстояние от нуля до x в приведенной системе вычетов. Тогда в группе $\mathbb{Z}_N$ можно взять, например, множество $A_0 := \{x \in \mathbb{Z}_N : |x^2| \leq 2^{-1}\delta N\}$. Пользуясь равномерной распределенностью квадратичных вычетов, легко видеть, что $|A_0| \sim \delta N$, величина $\|\widehat{f}\|_\infty$ — мала, но значение $\Lambda_4(f)$ — велико (см. детали в [56]). Поэтому для задач с арифметическими прогрессиями длины больше, чем три нам нужно как-то видоизменить импликацию (24).

Чтобы сформулировать правильный аналог (24) нам понадобятся нормы Гауэрса.

Пусть $\mathbf{G}$ — конечная абелева группа, $|\mathbf{G}| = N$, $d \geq 0$ — натуральное число и $\{0, 1\}^d = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) : \omega_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, \dots, d\}$ — обычный d -мерный куб. Для $\omega \in \{0, 1\}^d$ пусть $|\omega|$ равно $\omega_1 + \dots + \omega_d$. Если $h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbf{G}^d$, то $\omega \cdot h := \omega_1 h_1 + \dots + \omega_d h_d$. Пусть также $\mathcal{C}$ означает оператор комплексного сопряжения. Если n — натуральное число, то $\mathcal{C}^n$ означает применение оператора комплексного сопряжения n раз.

Определение 6.3 Пусть $f : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}$ — произвольная функция. Равномерная норма Гауэрса (или просто норма Гауэрса) этой функции задается формулой

$$\|f\|_{U^d} := \left(\frac{1}{N^{d+1}} \sum_{x \in \mathbf{G}} \prod_{h \in \mathbf{G}^d} \prod_{\omega \in \{0,1\}^d} \mathcal{C}^{|\omega|} f_\omega(x + \omega \cdot h) \right)^{1/2^d}. \quad (25)$$

Можно показать, что выражение (25) действительно задает норму для всех $d \geq 2$ (см. [56] или [4]). В частности справедливо неравенство треугольника

$$\|f + g\|_{U^d} \leq \|f\|_{U^d} + \|g\|_{U^d}. \quad (26)$$

Нормы Гауэрса, как и L_p -нормы, удовлетворяют неравенству монотонности

$$\|f\|_{U^{d-1}} \leq \|f\|_{U^d} \quad (27)$$

для всех $d \geq 2$.

Остановимся чуть подробнее на случае $d = 2$. Пользуясь формулой обращения (13), легко видеть, что U^2 — норма функции f выражается в терминах преобразования Фурье.

$$\|f\|_{U^2} = \left(\frac{1}{N^4} \sum_{r \in \mathbf{G}} |\widehat{f}(r)|^4 \right)^{1/4}. \quad (28)$$

Таким образом, U^2 — норма некоторой функции это просто L_4 -норма ее преобразования Фурье, умноженная на N^{-1} .

Лемма 6.4 Пусть $f : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{D}$ — произвольная функция. Тогда $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_4$. Наоборот $\|f\|_{U^2} = N^{-1} \|\widehat{f}\|_4 \leq \|\widehat{f}\|_\infty^{1/2} \cdot N^{1/2}$.

Первое неравенство леммы очевидно, а второе вытекает из равенства Парсеваля

$$\|\widehat{f}\|_4^4 = \sum_r |\widehat{f}(r)|^4 \leq \|\widehat{f}\|_\infty^2 \cdot \|\widehat{f}\|_2^2 = N \|\widehat{f}\|_\infty^2 \cdot \|f\|_2^2 \leq \|\widehat{f}\|_\infty^2 N^2.$$

Лемма выше говорит о том, что для функций f значения которых по модулю ограничены единицей нет большой разницы между $\|\widehat{f}\|_\infty$ и $\|f\|_{U^2}$. Поэтому импликацию (24) можно переформулировать так

$$\|f\|_{U^2} \text{ — мало} \implies \Lambda_3(f) \text{ — мало}. \quad (29)$$

Теперь стало ясно как можно обобщить импликацию (24).

Утверждение 6.5 (см. [55, 56]) Для всех $k \geq 3$ выполнено

$$\|f\|_{U^{k-1}} \text{ — мало} \implies \Lambda_k(f) \text{ — мало}. \quad (30)$$

Итак, мы получили аналог предложения 6.2 или, что тоже самое леммы 2 для случая арифметических прогрессий длины k , $k > 3$. Нам осталось найти правильный вариант леммы 3. Пользуясь неравенствами для норм из леммы 6.4, переформулируем ее следующим образом. Пусть далее $\mathbf{G} = \mathbb{Z}_N$.

Лемма 6.6 (не равномерный случай, U_2 — норма, группа $\mathbb{Z}_N$) Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}_N$ — произвольное множество, $|A| = \delta N$, f — балансовая функция множества A , $\alpha \in (0, 1]$ — действительное число и $N \gg \alpha^{-C}$. Если $\|f\|_{U^2} \geq \alpha$, то существует прогрессия Q , $|Q| \gg \alpha^C N^{1/2}$ такая, что $|A \cap Q| \geq (\delta + c\alpha^C)|Q|$. Здесь $C, c > 0$ — некоторые константы.

Выше условие не α -равномерности множества A было заменено на оценку $\|f\|_{U^2} \geq \alpha$, что, конечно, можно сделать ввиду леммы 6.4. Сформулируем аналог леммы выше для норм U^k , $k \geq 3$ (см. [56]).

Лемма 6.7 (не равномерный случай, U_k — норма) Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}_N$ — произвольное множество, $|A| = \delta N$, f — балансовая функция множества A , $\alpha \in (0, 1]$ — действительное число и $N \gg \alpha^{-C}$. Если $\|f\|_{U^k} \geq \alpha$, то существует прогрессия Q , $|Q| \gg \alpha^C N^{c\alpha^C}$ такая, что

$$|A \cap Q| \geq (\delta + c\alpha^C)|Q|. \quad (31)$$

Здесь $c, C > 0$ — некоторые константы.

Заметим, что в лемме выше, в отличие от леммы 6.6, оценка на длину прогрессии Q более слабая. В какой-то степени это по-существу. По крайней мере, в примере с множеством A_0 (см. выше) нельзя найти прогрессию Q в $\mathbb{Z}$ (или даже в $\mathbb{Z}_N$) длиной по-порядку больше, чем $N^{1/2}$, для которой было бы выполнено неравенство (31).

Как мы видели выше (см. лемму 6.4) малость коэффициентов Фурье функции f эквивалентна малости ее U^2 -нормы. Это совершенно не так в случае U^k -норм, $k \geq 3$. Тот же самый пример Гауэрса множества A_0 показывает, что существуют множества с большой U^3 -нормой их балансовой функции, но с малыми коэффициентами Фурье.

Дело в том, что даже в самом простом случае $k = 4$ равномерная U^3 -норма Гауэрса функции f может быть выражена только через коэффициенты Фурье *разностной функции* $\Delta(f; u)(x) := f(x)f(x+u)$

$$\|f\|_{U^3}^8 = \frac{1}{N^6} \sum_u \sum_r |\widehat{\Delta}(f; u)(r)|^4.$$

Из формулы выше вытекает, что U^3 -норма балансовой функции множества A мала тогда и только тогда, когда для "почти всех" u множество $A \cap (A - u)$ имеет маленькие коэффициенты Фурье (см. [55, 56] или обзор [4]). Исходя из такого выражения для U^3 -нормы видно, что доказательство леммы 6.7 представляет значительные сложности даже в случае $k = 4$, поскольку условие $\|f\|_{U^3} \geq \alpha$ дает нам информацию о *разностных функциях*, а не о самой функции f . Тем не менее, в статье [56] Гауэрс решил эту *обратную* задачу аддитивной теории чисел и получил следующую информацию об исходной функции f .

Теорема 6.8 (Гауэрс) Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}_N$ — некоторое множество, f — ее балансовая функция, $\eta > 0$ — действительное число и $\|f\|_{U^d} \geq \eta$. Тогда найдутся абсолютные константы $C_d, c_d > 0$ такие, что для всех $N \geq \exp(C_d \eta^{-C_d})$ существует многочлен $p_{d-1}(x)$ степени $d-1$ и арифметическая прогрессия P , $|P| \gg c_d \eta^{C_d} N^{c_d \eta^{C_d}}$ для которой выполнено

$$\left| \sum_{x \in P} f(x) e(p_{d-1}(x)) \right| \geq c_d \eta^{C_d} |P|. \quad (32)$$

Используя количественную версию теоремы А. Вейля о равномерной распределенности дробных долей многочленов Гауэрс уже относительно просто вывел из теоремы 6.8 лемму 6.7. Можно даже сказать, что теорема 6.8 является ядром его доказательства. Возможно чуть обобщить теорему 6.8.

Теорема 1. (Гауэрс) Пусть $\eta > 0$ — действительное число, $f : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{D}$ — некоторая функция, $\sum_x f(x) = 0$ и $\|f\|_{U^d} \geq \eta$. Тогда найдутся абсолютные константы $C_d, c_d > 0$ такие, что для всех $N \geq \exp(C_d \eta^{-C_d})$ существует многочлен $p_{d-1}(x)$ степени $d-1$ и арифметическая прогрессия P , $|P| \gg c_d \eta^{C_d} N^{c_d \eta^{C_d}}$ для которой выполнено

$$\left| \sum_{x \in P} f(x) e(p_{d-1}(x)) \right| \geq c_d \eta^{C_d} |P|. \quad (33)$$

Утверждение выше называют *слабой обратной теоремой для норм Гауэрса*. "Слабость" здесь состоит в том, что, как мы видели ранее, в случае $d = 2$ можно сказать

гораздо больше

$$\|f\|_{U^2} \geq \eta \implies \exists \text{ многочлен } p_1(x), \deg p_1 = 1 \text{ такой, что } \left| \sum_x f(x) e(p_1(x)) \right| \gg \eta^C N,$$

где $C > 0$ — некоторая абсолютная константа. Иными словами, в последней формуле, в отличие от (33), отсутствует суммирование по прогрессии P . Слабая обратная теорема для норм Гауэрса в ситуации когда $k = 3$ была перенесена Грином и Тао на случай произвольной абелевой группы $\mathbf{G}$ (см. [130], а также [131]). Грубо говоря, в группе $\mathbf{G}$ арифметическая прогрессия P в формуле (33) должна быть заменена на трансляцию множества Бора. Обратные теоремы, включающие в свою формулировку, так называемые, *нульпоследовательности* были получены в статье [130].

Доказательство теорем 2.10 и 1 содержит в себе много новых и красивых идей. Методы из работы Гауэрса развивались различными авторами (см., например, [130, 121], [104]—[131]). Самым ярким из полученных в этих статьях результатом, является, несомненно, теорема Б. Грина и Т. Тао о прогрессиях в простых числах [104].

Теорема 2. (Грин, Тао) *Для всех натуральных $k \geq 3$ множество простых чисел содержит арифметическую прогрессию длины k .*

На самом деле Грин и Тао доказали еще более сильный результат.

Пусть A — произвольное подмножество множества простых чисел $\mathcal{P}$ и пусть $\pi(N)$ — число простых чисел, не превосходящих N . Верхней плотностью A , относительно $\mathcal{P}$ называется величина $\limsup_{N \rightarrow \infty} |A \cap [N]| / \pi(N)$.

Теорема 3. (Грин, Тао) *Пусть $A \subseteq \mathcal{P}$ — произвольное множество положительной верхней плотности, относительно $\mathcal{P}$ и пусть $k \geq 3$. Тогда A содержит арифметическую прогрессию длины k .*

В своем доказательстве Грин и Тао использовали некоторую "сильную" версию теоремы Гауэрса 1, правда в их аналоге неравенства (33) вместо многочлена стояла некоторая более сложно устроенная "дуальная" функция (см. [104]).

Для $k = 3$ теорему 2 доказал в 1938 году Н.Г. Чудаков [93] (см. также [94, 95]), а теорему 3 — Грин в [105]. Он получил даже более сильный результат. Пусть $\log_{[1]} = \log N$ и для $l \geq 2$ положим $\log_{[l]} N = \log(\log_{[l-1]} N)$. Таким образом $\log_{[l]} N$ есть результат взятия логарифма от числа N l раз подряд.

Теорема 4. (Грин) *Пусть N — достаточно большое натуральное число и A — произвольное подмножество $\mathcal{P} \cap [N]$ такое, что*

$$|A| \gg \frac{N \sqrt{\log_{[5]} N}}{\log N \sqrt{\log_{[4]} N}}.$$

Тогда A содержит арифметическую прогрессию длины три.

Отметим, что из гипотезы 2.10 вытекают обе теоремы 2 и 3.

Список литературы

- [1] *Nathanson M.* Additive number theory. Inverse problems and the geometry of sumsets / Graduate Texts in Mathematics 165, Springer–Verlag, New York, 1996.
- [2] *Tao T., Vu V.* Additive combinatorics / Cambridge University Press 2006.
- [3] *Green B.* Finite field model in additive combinatorics // Surveys in Combinatorics 2005, LMS Lecture Notes **329**, 1–29.
- [4] *Шкредов И. Д.* Теорема Семереди и задачи об арифметических прогрессиях // Успехи мат. наук 61:6 111–178. English transl. Comm. Moscow Math. Soc. **61:6** (2006) 1101–1166.
- [5] *Шкредов И. Д.* Анализ Фурье в комбинаторной теории чисел // Успехи мат. наук **65:3** (2010) 88–145.
- [6] *Cauchy A. L.* Recherches sur les nombres // J. École Polytech. 9 (1813), 99–116.
- [7] *Shnirel'man L. G.* Über additive Eigenschaften von Zahlen // Math. Ann. **107** (1933), 649–690.
- [8] *Mann H. B.* A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers // Ann. Math., 43:523–527, 1942.
- [9] *Rudin W.* Fourier analysis on groups / Wiley 1990.
- [10] *Bourgain J.* Roth's Theorem on Progressions Revisited // Preprint, 2007.
- [11] *Van der Waerden B. L.* Beweis einer Baudetschen Vermutung // Nieuw Arch. Wisk., 15, 1927, 212–216.
- [12] *Хинчин А. Я.* Три жемчужины теории чисел / М.: Едиториал УРСС, 2004.
- [13] *Грэхем Р.* Начала теории Рамсея / М.: Мир, 1984.
- [14] *Graham R. L., Rothschild B. L., Spencer J.* Ramsey Theory / Wiley Interscience, Series in Discrete Mathematics, 1980.
- [15] *Shelah S.* Primitive Recursive Bounds for van der Waerden Numbers // J. Amer. Math. Soc., v. 1, 1988, 683–697.
- [16] *Erdős P., Turán P.* On some sequences of integers // J. Lond. Math. Soc., 11, 1936, 261–264.
- [17] *Heath–Brown D. R.* Integer sets containing no arithmetic progressions // J. London Math. Soc. (2), v. 35, N. 3, 1987, 385–394.
- [18] *Szemerédi E.* On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression // Acta Arith. Acad. Sci. Hungar., v. 20, 1969, 89–104.
- [19] *Szemerédi E.* On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression // Acta Arith., 27, 1975, 299–345.

- [20] *Szemerédi E.* On sets of integers containing no arithmetic progressions // Acta Math. Hungar., v. 56, 1990, 155–158.
- [21] *Szemerédi E.* Regular partitions of graphs // Colloques Internationaux CNRS, 260 — Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes, Orsay, 1976, 399–401.
- [22] *Kohayakawa Y.* Szemerédi’s regularity lemma for sparse graphs // Foundations of Computational Mathematics, Selected papers, IMPA conference, January 1997, Rio de Janeiro, Springer, 1997.
- [23] *Kolmós J., Simonovits M.* Paul Erdős is 80 (под редакцией D. Miklós, V.T. Sós, T. Szönyi) / v. 2, Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 1996.
- [24] *Roth K. F.* On certain sets of integers (I) // J. London Math. Soc., 28, 1953, 245–252.
- [25] *Roth K. F.* On certain sets of integers (II) // J. London Math. Soc., 29, 1953, 20–26.
- [26] *Bourgain J.* On triples in arithmetic progression // GAFA, 9, 1999, 968–984.
- [27] *Bourgain J.* A Szemerédi type theorem for sets of positive density in $\mathbb{R}^k$ // Israel Journal of Mathematics, v. 54, N. 3, 1986, 307–316.
- [28] *Szemerédi E., Ruzsa I.* Triple systems with no six points carrying three triangles // Combinatorics (Keszthly, 1976), v. II, N. 11, 1978, 939–945. North-Holland, Amsterdam–New York.
- [29] *Graham R. L., Rödl V.* Numbers in Ramsey theory // Surveys in Combinatorics, London Math. Soc. Lecture Note, Series, 123, 1987, 111–155.
- [30] *Graham R. L., Grötschel M., Lovász L.* Handbook of Combinatorics / MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1995.
- [31] *Успенский В. А.* Лекции о вычислимых функциях / М., 1960.
- [32] *Rado R.* Verallgemeinerung eines Satzes von van der Waerden mit Anwendungen auf ein problem der Zahlentheorie, Sonderausgabe aus den Sitzungsberichten der Preuss // Akad. der Wiss. Phys.–Math. klasse, 17, 1933, 1–10.
- [33] *Rado R.* Studien zur Kombinatorik // Math. Z., 36, 1933, 424–480.
- [34] *Rado R.* Some recent results in combinatorial analysis / Congrès International des Mathématiciens, Oslo, 1936.
- [35] *Deuber W.* Partitionen und lineare Gleichungssysteme // Math. Z., 133, 1973, 109–123.
- [36] *Deuber W.* Partitions theorems for Abelian groups // J. Comb. Theory, Series A, 19, 1975, 95–108.
- [37] *Schur I.* Über die Kongruenz $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$ // Jber. Deutsch. Math. Verein., 25, 1916, 114–117.
- [38] *Adhikari S. D.* A note on a question of Erdős // Exposition. Math., v. 15, N. 4, 1997, 367–371.

- [39] *Brown T. C., Rödl V.* Monochromatic solutions to equations with unit fractions // Bull. Austral. Math. Soc., 43, 1991, 387–392.
- [40] *Lefmann H.* On partition regular systems of equations // J. Combin. Theory, Ser. A, 58, 1991, 35–53.
- [41] *Frankl P., Graham R. L., Rödl V.* Quantitative theorems for regular systems of equations // J. Combin. Theory, Ser. A, 47, 1988, 246–261.
- [42] *Choi S. L.* On arithmetic progressions in sequences // J. London Math. Soc. (2), 10, 1975, 427–430.
- [43] *Furstenberg H.* Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions // J. d’Analyse Math., v. 31, 204–256, 1977.
- [44] *Furstenberg H.* Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory / Princeton (N.J.), 1981.
- [45] *Furstenberg H., Katznelson Y.* An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations // J. d’Analyse Math., v. 34, 275–291, 1978.
- [46] *Furstenberg H., Katznelson Y. and Ornstein D.* The Ergodic Theoretical Proof of Szemerédi’s Theorem // Bull. Amer. Math. Soc., v. 7, N.3, 527–552, 1982.
- [47] *Tao T.* A quantitative ergodic theory proof of Szemerédi’s theorem // <http://www.arXiv.org/math.CO/0405251>, 2004.
- [48] *Bergelson V., Leibman A.* Polynomial extensions of van der Waerden’s and Szemerédi’s theorems // J. Amer. Math. Soc., v.9, N.3, 1996, 725–753.
- [49] *Bergelson V., Leibman A.* Set-polynomials and polynomial extension of the Hales–Jewett theorem // Ann. of Math. (2), v.150, N.1, 1999, 33–75.
- [50] *Furstenberg H., Katznelson Y.* A density version of the Hales–Jewett theorem // J. Analyse Math., 57, 1991, 64–119.
- [51] *Hales A. W., Jewett A. I.* Regularity and positional games // Trans. Amer. Math. Soc., 106, 1963, 222–229.
- [52] *Leibman A.* Multiple recurrence theorem for measure preserving actions of a nilpotent group // Geom. func. anal., v.8, 1998, 853–931.
- [53] *McCutcheon R.* Elemental methods in ergodic Ramsey theory / Springer, Lect. Notes Math., v. 1722, 1999.
- [54] *Host B., Kra B.* Nonconventional ergodic averages and nilmanifolds // Ann. Math., представлено в печать.
- [55] *Gowers W. T.* A new proof of Szemerédi’s theorem for arithmetic progressions of length four // Geom. func. anal., v.8, 1998, 529–551.
- [56] *Gowers W. T.* A new proof of Szemerédi’s theorem // Geom. func. anal., v.11, 2001, 465–588.

- [57] *Gowers W. T.* Lower bounds of tower type for Szemerédi's uniformity lemma // *Geom. func. anal.*, v.7, N.2, 1997, 1–16.
- [58] *Nagle B., Rödl V., Schacht M.* The counting lemma for regular k -uniform hypergraphs // *Random Structures and Algorithms*, представлено в печать.
- [59] *Gowers W. T.* Quasirandomness, Counting and Regularity for 3-Uniform Hypergraphs // представлено в печать.
- [60] *Gowers W. T.* Hypergraph Regularity and the multidimensional Szemerédi's Theorem // представлено в печать.
- [61] *Ajtai M., Szemerédi E.* Sets of lattice points that form no squares // *Stud. Sci. Math. Hungar.*, 9, 1974, 9–11.
- [62] *Behrend F. A.* On sets of integers which contain no three terms in arithmetic progression // *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 23, 1946, 331–332.
- [63] *Salem R., Spencer D. C.* On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progression // *Proc. Nat. Acad. Sci. Wash.*, 28, 1942, 561 – 563.
- [64] *Salem R., Spencer D. C.* On sets which do not contain a given number of terms in arithmetical progression // *Nieuw Arch. Wisk.*, 23, 1950, 561 – 563.
- [65] *Rankin R. A.* Sets of Integers Containing not more than a Given Number of Terms in Arithmetic Progression // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 65, N.4, Sec. A, 1961, 332–344.
- [66] *Rankin R. A.* Representations of a number as the sum of a large number of squares // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 65, N.4, Sec. A, 1961, 318–331.
- [67] *Moser L.* On non-averaging sets of integers // *Canad. Math. J.*, 5, 1953, 245–252.
- [68] *Laba I., Lacey M.* On Sets of Integers Not Containing Long Arithmetic Progressions // [http:// www.arXiv:math.CO/0108155](http://www.arXiv:math.CO/0108155), 2001.
- [69] *Alon N., Spencer J.* *The Probabilistic Method* / New York: Wiley, 1992.
- [70] *Varnavides P.* On certain sets of positive density // *J. London Math. Soc.* 34, 1959, 358–360.
- [71] *Croot E.* A Structure Theorem for Positive Density Sets Having the Minimal Number of 3-Term Arithmetic Progressions // представлено в печать.
- [72] *Croot E.* Long Arithmetic Progressions in Critical Sets // [http:// www.arXiv:math.NT/0403082](http://www.arXiv:math.NT/0403082), 2004.
- [73] *Baker R. C., Harman G., Pintz J.* The Difference Between Consecutive Primes, II // *Proc. London Math. Soc.*, 83, 2001, 532–562.
- [74] *Bourgain J.* On Arithmetic Progressions in Sums of Sets of Integers // *A Tribute of Paul Erdős*, 105–109, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [75] *Ruzsa I.* Arithmetic progressions in sumsets // *Acta Arith.*, v. 60, N. 2, 1991, 191–202.

- [76] *Green B.* Arithmetic Progressions in Sumsets // *Geom. Funct. Anal.*, v. 12, N. 3, 2002, 584–597.
- [77] *Freiman G. A., Halberstam H., Ruzsa I.* Integer Sumsets Containing Long Arithmetic Progressions // *J. London Math. Soc.* (2), 46, 1992, 193–201.
- [78] *Ruzsa I.* Arithmetical progressions and the number of sums // *Period. Math. Hungar.* (1), 25, 1992, 105–111.
- [79] *Sárközy A.* Finite Addition Theorems. I // *J. Number Theory*, 32, 1989, 114–130.
- [80] *Sárközy A.* Finite Addition Theorems. II // *J. Number Theory*, 48, 1994, 197–218.
- [81] *Sárközy A.* Finite Addition Theorems. III // *Groupe de Travail en Théorie Analytique et Élémentaire des Nombres*, 1989–1990, 105–122, *Publ. Math. Orsay*, 92–01, Univ. Paris XI, Orsay, 1992.
- [82] *Lev V. F.* Optimal Representations by Sumsets and Subset Sums // *J. Number Theory*, 62, 1997, 127–143.
- [83] *Lev V. F.* Blocks and Progressions in Subset Sums Sets // *Acta Arith.*, 106, 2003, 123–142.
- [84] *Szemerédi E., Vu V.* Long Arithmetic Progressions in Sum-Sets and the Number of x -sum-free Sets // представлено в печать.
- [85] *Szemerédi E., Vu V.* Finite and Infinite Arithmetic Progressions in Sumsets // представлено в печать.
- [86] *Solymosi J.* Arithmetic Progressions in Sets with Small Sumsets // представлено в печать.
- [87] *Jungić V., Licht J., Mahdian M., Nečetril J., Radoičić R.* Rainbow Arithmetic Progressions and Anti-Ramsey Results // *Comb., Prob. and Comp.*, 12, 2003, 599–620.
- [88] *Jungić V., Radoičić R.* Rainbow 3-term arithmetic progression // представлено в печать.
- [89] *Axenovich M., Fon-Der-Flaass D.* On rainbow arithmetic progressions // *Electr. J. Comb.*, 11, 2004.
- [90] *Erdős P., Turán P.* On a problem of Sidon in additive number theory and on some related problems // *J. London Math. Soc.*, 16, 1941, 212–215.
- [91] *Jiang T.* Anti-Ramsey numbers of subdivided graphs // представлено в печать, 2001.
- [92] *Dickson L. E.* History of the theory of numbers / Carnegie Institution, 1923.
- [93] *Chudakov N. G.* On the density of the set of even numbers which are not representable as a sum of two odd primes // *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 2, 1938, 25–40.
- [94] *Van der Corput J. G.* Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten // *Math. Ann.*, 116, 1939, 1–50.

- [95] *Chowla S.* There exists an infinity of 3-combinations of primes in A.P. // Proc. Lahore Philos. Soc., 6, N. 2, 1944, 15–16.
- [96] *Moran A., Pritchard P., Thyssen A.* Twenty-two primes in arithmetic progression // Math. Comp., v. 64, N. 211, 1995, 1337–1339.
- [97] *Frind M., Jobling P., Underwood P.* 23 primes in arithmetic progression // primes.plentyoffish.com
- [98] *Hardy G. H., Wright E. M.* An Introduction to the Theory of Numbers / Oxford University Press, 1960.
- [99] *Бухштаб А. А.* Теория чисел / М.: Просвещение, 1966.
- [100] *Виноградов И. М.* Основы теории чисел / СПб.: Изд-во "Лань" 2004.
- [101] *Goldston D., Yildirim C. Y.* Higher correlations of divisor sums related to primes, I: Triple correlations // Integers, v. 3, A5, 2003.
- [102] *Goldston D., Yildirim C. Y.* Higher correlations of divisor sums related to primes, III: k-correlations // представлено в печать.
- [103] *Goldston D., Yildirim C. Y.* Small gaps between primes, I // представлено в печать.
- [104] *Green B., Tao T.* The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions // Annals of Math., представлено в печать, [http:// www.arXiv:math.NT/0404188](http://www.arXiv:math.NT/0404188), 2004.
- [105] *Green B.,* Roth's theorem in the primes // Annals of Math., v. 161, N.3, 1609–1636, 2005.
- [106] *Фрейман Г. А.* Основания структурной теории сложения множеств / Казанский гос. пед. инст., Казань, 1966.
- [107] *Bilu Y.* Structure of sets with small sumset // Structure Theory of Sets Addition, Astérisque, v. 258, Soc. Math. France, Montrouge, 1999, 77–108.
- [108] *Ruzsa I.* Generalized arithmetic progressions and sumsets // Acta Math. Hungar., v. 65, 1994, 379–388.
- [109] *Chang M.-C.* A polynomial bound in Freiman's theorem // Duke Math. J., v. 113, N. 3, 2002, 399–419.
- [110] *Solymosi J.* Note on a generalization of Roth's theorem // Discrete and computational geometry, 825–827, Algorithms Combin., 25, Springer, Berlin, 2003.
- [111] *Sárcözy G. N., Selkow S.* On a question of Gowers concerning isosceles right-angle triangles // представлено в печать, 2003.
- [112] *Vu V. H.* On a question of Gowers // Ann. of Combinatorics, 6, 2002, 229–233.
- [113] *Chung F. R. K., Graham R. L., Wilson R. M.* Quasi-random graphs // Combinatorica 9 (4), 1989, 345–362.

- [114] *Chung F. R. K., Graham R. L.*, Quasi-random subsets of Z_n // J. Combin. Theory, Ser. A, v. 64, N. 1, 1992, 64–86.
- [115] *Sárközy A.* On Difference Sets of Sequences of Integers I // Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 31, nos. 1–2, 1978, 125–149.
- [116] *Sárközy A.* On Difference Sets of Sequences of Integers III // Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 31, nos. 3–4, 1978, 355–386.
- [117] *Srinivasan S.* On a Result of Sárközy and Furstenberg // Nieuw. Acta. Wisk. (4), v.3, N.3, 1985, 275–280.
- [118] *Pintz J., Steiger W. L., Szemerédi E.* On Sets of Natural Numbers whose Difference Set Contains No Squares // J. London Math. Soc. (2), v.37, 1988, 219–231.
- [119] *Green B.* On arithmetic structures in dense sets of integers // Duke Math. Journal, v. 144, N. 2, 215–238, 2002.
- [120] *Ruzsa I.* Difference Sets Without Squares // Period. Math. Hungar, v. 15, N. 3, 1984, 205–209.
- [121] *Bourgain J.* Exponential sums estimates over subgroups and almost subgroups of $\mathbb{Z}_q^*$, where q is composite with few prime factors // GAFA, представлено в печать.
- [122] *Bourgain J., Glibichuk A., Konyagin S.* Estimate for the number of sums and products and for exponential sums in fields of prime order // J. London Math. Soc., представлено в печать.
- [123] *Tao T.* Lecture notes 5 for Math 254A // UCLA, 2003, <http://math.ucla.edu/tao/254a.1.03w/notes5.dvi>.
- [124] *Green B.* A Szemerédi-type regularity lemma abelian groups // Geom. Funct. Anal., 15, 2, 2005, 340–376.
- [125] *Green B.* Finite field models in additive number theory // Surveys in Combinatorics, LMS lecture notes, 329, 2005, 1–29.
- [126] *Шкредов И. Д.* Об одной задаче Гауэрса // ДАН, 400, N 2, 169–172, 2005.
- [127] *Шкредов И. Д.* Об одной задаче Гауэрса // ИАН, 200, N 2, 176–217, 2006.
- [128] *Шкредов И. Д.* Об одном обобщении теоремы Семереди // ДАН, 405, N 3, 315–319, 2005.
- [129] *Shkredov I. D.* On a Generalization of Szemerédi’s Theorem // <http://www.arXiv:math.NT/0503639> v1 28 Mar 2005.
- [130] *Green B., Tao T.* An inverse theorem for the Gowers $U^3(G)$ norm, with applications // <http://www.arXiv:math.NT/0503014> v1 1 Mar 2005.
- [131] *Green B., Tao T.* New bounds for Szemerédi’s Theorem, I: Progressions of length 4 in finite field geometries // <http://www.arXiv:math.CO/0509560> v1 23 Sep 2005.

- [132] *Samorodnitsky A., Trevisan L.* Gowers Uniformity, Influence of Variables, and PCPs // [http:// www.arXiv : math.CO/0510264](http://www.arXiv:math.CO/0510264) v1 12 Oct 2005.
- [133] *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики / Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972.
- [134] *Boshernitzan M.* Quantitative recurrence results // *Inventiones mathematicae*, 113, Fasc. 3, 1993, 617–631.
- [135] *Мощевитин Н. Г.* Об одной теореме Пуанкаре // *УМН*, 53, вып. 1, 1998, 219–220.
- [136] *Шкрёдов И. Д.* О возвращаемости в среднем // *Математические заметки*, 72, вып. 4, 2002, 625–632.
- [137] *Shkredov I. D.* On Multiple Recurrence // [http:// www.arXiv : math.DS/0406413](http://www.arXiv:math.DS/0406413), 2004.
- [138] *Shkredov I. D.* On Dynamical Systems With Slow Recurrence Time // *Математический сборник*, представлено в печать, [http:// www.arXiv : math.DS/0507345](http://www.arXiv:math.DS/0507345), 2005.
- [139] *Afraimovich V., Chazottes J. R., Saussol B.* Pointwise dimensions for Poincare recurrence associated with maps and special flows // *Disc. Cont. Dyn. Syst.*, A 9, 2003, p. 263–280.
- [140] *Barreira L., Pesin Y., Schmeling J.* Dimension and product structure of hyperbolic measures // *Ann. of Math.*, 2, 149, 1999, p. 755–783.
- [141] *Barreira L., Saussol B.* Hausdorff dimension of measures via Poincare recurrence // *Commun. Math. Phys.*, 219, 2001, 443–463.
- [142] *Barreira L., Saussol B.* Product structure of Poincare recurrence // *Ergod. Th. and Dynam. Sys*, 22, 2002, 33–61.
- [143] *Saussol B., Troubetzkoy S., Vaienti S.* Recurrence, dimensions and Lyapunov exponents // *J. Stat. Phys.*, 106, 2002, p. 623–634.
- [144] *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем / М.: издательство "Факториал 1999.
- [145] *Богачев В. И.* Основы теории меры / Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2003.